



TITLE:

Schumacher方程式から得られる分岐図(音響系・光学系におけるカオス,研究会報告)

AUTHOR(S):

小畠, 時彦; 井戸川, 徹

CITATION:

小畠, 時彦 ...[et al]. Schumacher方程式から得られる分岐図(音響系・光学系におけるカオス,研究会報告). 物性研究 1994, 62(5): 652-663

ISSUE DATE:

1994-08-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/95367>

RIGHT:

Schumacher 方程式から得られる分岐図

小島 時彦 (筑波大物工) 井戸川 徹 (埼玉工大)

1. はじめに

音孔を全て閉じたクラリネットを人工吹鳴する実験については既に報告してきた [1], [2]。実験結果は以下のように要約される。

(a) 人工の唇がマウスピースをくわえる深さ及び強さ (以後、lip adjustment とする) を固定した状態で吹鳴圧力 P_0 を広い範囲で上昇、下降させるとき D_3 音または通常リードミスと呼ばれる高音を放射する周期的振動に加えて複雑な非周期振動が励起される。

(b) lip adjustment が一定に保たれていても与えられた吹鳴圧力で二つ以上の振動状態が励起される場合がある。励起される振動状態は吹鳴圧力を変化させる直前の振動状態に依存する。

Schumacher [3] はクラリネットの発音機構を記述する非線形連立微積分方程式を提案し、運指にしたがって周期的振動解、multiphonic 振動解が得られることを示した。これらの振動解を求めるに際して特性インピーダンス Z_0 は円柱気柱部分の断面積から求められた値 ($Z_0 = 2.31 \times 10^6 \text{ kg/m}^4\text{s}$) を用いている。また、式中に現れる反射関数 $r(t)$ にマウスピース部分での短い round trip time の反射波は考慮していない。

本報告では前述の Schumacher 方程式の振動解が、特性インピーダンス Z_0 、吹鳴圧力 P_0 の値によってどのように影響されるかについて検討する。Schumacher 方程式の解析を通じて実験で得られた結果を解明することが目的である。

2 節で Schumacher 方程式について簡単に述べる。3 節では計算方法と結果について示す。4 節で考察を行い、5 節で結論を述べる。

2. Schumacher 方程式

Schumacher 方程式は以下の式 (1) - (5) の非線形連立微積分方程式から成る。式中に含まれる変数とパラメータを表 1 にまとめて示す。

$$\ddot{x} + g_r \dot{x} + \omega_0^2(x - x_0) = \frac{p - P_0}{\mu} - \frac{1}{2} \frac{\rho}{w x (\tan \theta) \mu S_r} U^2 \quad (1)$$

式 (1) はリードの運動方程式であり、2 階微分方程式で与えられている。我々は過去に行った実験と比較しやすいようにリード開口 $x(t)$ を用いて表した。右辺第 2 項はベルヌーイ力を表す。

$$M_e \dot{U}_f = P_0 - p - \frac{|U_f|^{3/2} \cdot \text{sgn}(U_f)}{A^{3/2} x^2} \quad (2)$$

$$M_e(x) = \frac{\rho}{2\pi w} \sqrt{\frac{w}{x}} \left\{ 1 + 2 \ln \left(\frac{2w}{x} \right) \right\} \quad (3)$$

表 1: Schumacher 方程式中に現れる変数とパラメータ

記号	物理量	記号	物理量	値
$p(t)$	マウスピース内音圧変化	μ	リードの質量/面積	0.0231 kg/m^2
$x(t)$	リード開口	S_r	リードの実効面積	$1.46 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
$U_f(t)$	スリットを通過する音響流れ	ω_0	リードの共振周波数	$23\,250 \text{ s}^{-1}$
$U(t)$	通過する空気の全体積流量	g_r	リードの減衰定数	$3\,000 \text{ s}^{-1}$
$M_e(x)$	通過する空気の等価質量	x_0	静止時リード開口	0.9 mm
$r(t)$	反射関数	w	スリット幅	14.0 mm
Z_0	特性インピーダンス ($\text{kg/m}^4\text{s}$)	A	流れに関する定数	0.0797 mks units
P_0	吹鳴圧力 (N/m^2)	Z_{00}	管の直流抵抗	$0.01 Z_0$

式 (2) はスリットを通過して気柱に流入する空気の運動方程式であり、音響流れ $U_f(t)$ を用いて記述されている。Schumacher 方程式の非線形性はこの式からもたらされる。 $M_e(x)$ はスリットを通過する空気の等価質量であり、式 (3) で与えられる。

気柱に流入する空気の全体積流量 $U(t)$ は $U_f(t)$ とリードが振動することにより生ずる流れの和で与えられる。

$$U = U_f - S_r \dot{x} \quad (4)$$

マウスピース内音圧変化 $p(t)$ は $U(t)$ と Z_0 の積により生じる圧力と反射関数 $r(t)$ を用いて計算される反射波の圧力との和で与えられている。

$$p = Z_0 U + \int_0^\infty r(t') \cdot \{Z_0 U(t-t') + p(t-t')\} dt' \quad (5)$$

3. 計算方法と結果

吹鳴圧力を時刻 $t = 0$ で 0 から P_0 にステップ状に変化させたときの式 (1) - (5) の解を計算する。 Z_0 , P_0 を除くパラメータは [3] にある値をそのまま用いた。式 (1) の右辺第 2 項のベルヌーイ力は簡単のため無視した。実際の計算にあたっては式 (1), (2), (4) の微分方程式を以下の台形則を使用した差分方程式に置き換えた。

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \frac{t_s}{2} \cdot \{f(t_i, \mathbf{y}_i) + f(t_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1})\} \quad (6)$$

この方法によればサンプリング周期 t_s を 0.01 ms 以下とするとき t_s による解の変化はほとんど認められなかった。それに反して [3] の論文の付録に示されている計算アルゴリズム（後退型オイラー法）

$$y_{i+1} = y_i + t_s \cdot f(t_{i+1}, y_{i+1}) \quad (7)$$

ではさらに t_s を小さくしても解には誤差が存在した。

本報告では $t_s = 0.01\text{ms}$ として計算を行った。初期条件は $t < 0$ で $x(t) = x_0 \text{ mm}$, $U_f(t) = 0 \text{ m}^3/\text{s}$, $p(t) = 0 \text{ N/m}^2$ とした。また、リード振動位置はマウスピースにより制約を受けるので $x(t) < 0\text{mm}$ となることはない。この状態になったときは $x(t) = 0 \text{ mm}$, $U_f(t) = 0 \text{ m}^3/\text{s}$ とした。

解の性質を把握しやすくし、しかも計算時間を節約するために反射関数 $r(t)$ は簡単な Gauss 関数

$$r(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ d \exp\{-h(t - t_R)^2\} & (t \geq 0) \end{cases} \quad (8)$$

を用いた [4]。ここで d, h はそれぞれ Gauss 関数の谷の深さ、半値幅により決まる定数である。 t_R は $r(t)$ の谷の最深部が現れるまでの時間であり round trip time である。本報告では半値幅が 0.2ms となるように h を決定した。この数値は内径 14.5mm の円筒管の $r(t)$ のそれに近い。また、 d は以下の積分

$$\int_0^\infty r(t) dt = \frac{Z_{00} - Z_0}{Z_{00} + Z_0} \approx -0.98 \quad (9)$$

を満たすように決定した。表 1 に示したように $Z_{00} = 00.1Z_0$ としたので式 (9) の積分値は約 -0.98 となる。式 (8) で $t_R = 0.5\text{ms}$ としたときの $r(t)$ を図 1 に示す。 t_R をこれ以上短くとると $r(t)$ は $t = 0$ で滑らかでなくなる。

この $r(t)$ を用いて Z_0 を三種類の値 ($Z_0 = 2.31, 5.00, 7.50 \times 10^6 \text{ kg/m}^4\text{s}$) で一定にして P_0 を変化させた場合、逆に P_0 を三種類の値 ($P_0 = 4.50, 7.00, 10.00 \times 10^3 \text{ N/m}^2$) で一定にして Z_0 を変化させた場合に得られた計算結果を以下に示す。 P_0 を $t = 0$ でステップ状に変化

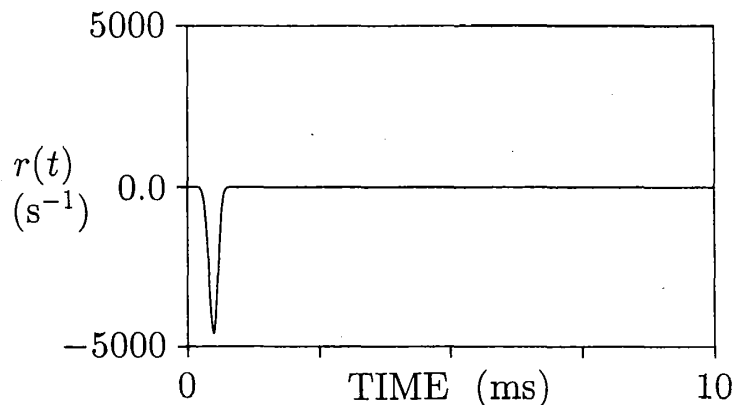


図 1：反射関数 $r(t)$ $t_R = 0.5 \text{ ms}$.

させた後、 $0 \leq t \leq 1500\text{ms}$ の間で $t_s = 0.01\text{ms}$ 毎に式 (1) - (5) を計算した。初期 transient が過ぎた後の $1000 \leq t \leq 1500\text{ms}$ に計算された時系列から波形のサンプル値

$$\{p_n, U_{fn}, x_n\} \equiv \{p(nt_s), U_f(nt_s), x(nt_s)\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (10)$$

が得られる。ここで $N = 50001$ である。

横軸に P_0 あるいは Z_0 をとり縦軸に $x(t)$ 波形データの極大値

$$\{x_m\} \quad (m = 1, 2, 3, \dots, M) \quad (11)$$

をとって分岐図を描かせた。ここで M は極大値の個数である。

図 2 は Z_0 の値を [3] に示された値 $Z_0 = 2.31 \times 10^6 \text{ kg/m}^4\text{s}$ に固定し P_0 を変化させたときの結果である。 $x_m = 0.9\text{mm}$ に引いた線はリードが静止しているときの位置を示している。 P_0 を $0.00 \leq P_0 (\times 10^3 \text{ N/m}^2) \leq 15.00$ の範囲で $0.05 \times 10^3 \text{ N/m}^2$ ずつ変化させた。 P_0 が $4.25 \times 10^3 \text{ N/m}^2$ よりも低い値のとき振動は励起されず点はプロットされない。振動は $4.25 \leq P_0 (\times 10^3 \text{ N/m}^2) \leq 12.30$ の範囲で励起される。この範囲で各 P_0 に対して得られる振動解は全て一周期振動でありプロットされる点は一つの点であるように見える。各 P_0 に対する点の位置は $x(t)$ 波形の最大値をあらわしている。また、 P_0 を $12.30 \times 10^3 \text{ N/m}^2$ よりも高くすると観測している全ての時間範囲で $x = 0 \text{ mm}$ となる。この状態ではリードが完全に閉じて振動が停止している。

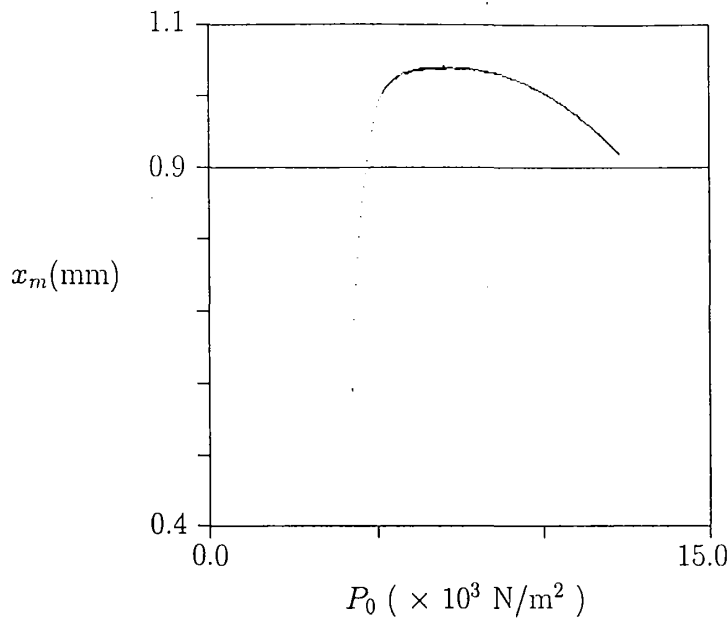


図 2：分岐図 $t_R = 0.5 \text{ ms}$, $Z_0 = 2.31 \times 10^6 \text{ kg/m}^4\text{s}$, $0.00 \leq P_0 (\times 10^3 \text{ N/m}^2) \leq 15.00$.

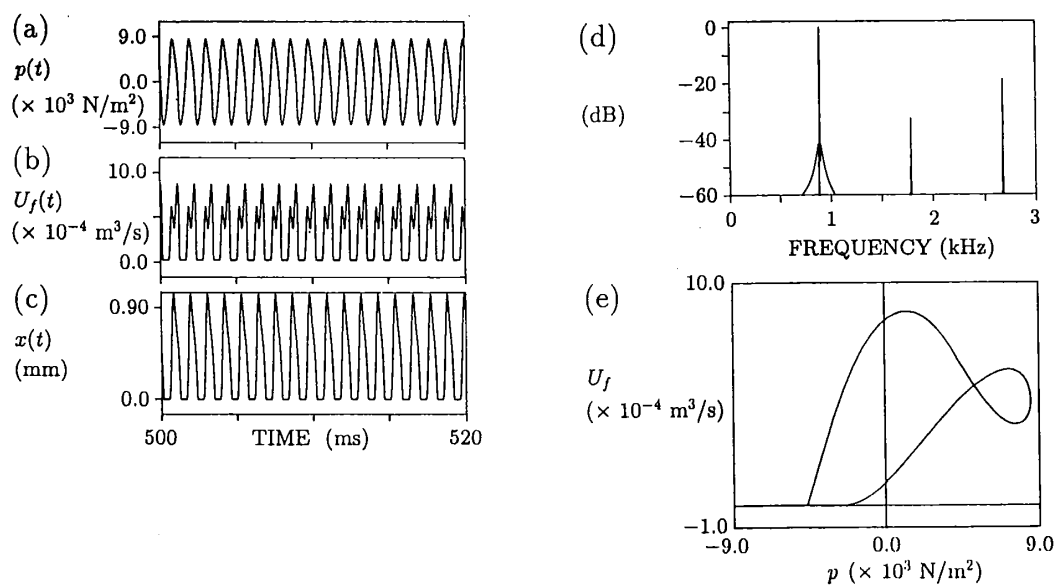


図 3 : (a) $p(t)$ 波形, (b) $U_f(t)$ 波形, (c) $x(t)$ 波形,
(d) $p(t)$ の パワースペクトル, (e) $U_f - p$ 状態空間における軌道
 $t_R = 0.5 \text{ ms}$, $Z_0 = 2.31 \times 10^6 \text{ kg/m}^4\text{s}$, $P_0 = 8.00 \times 10^3 \text{ N/m}^2$.

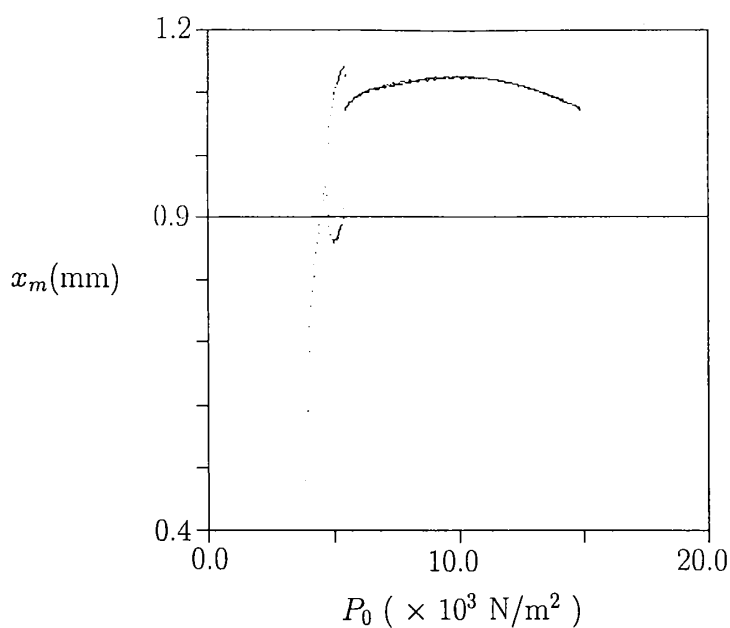


図 4 : 分岐図 $t_R = 0.5 \text{ ms}$, $Z_0 = 5.00 \times 10^6 \text{ kg/m}^4\text{s}$, $0.00 \leq P_0 (\times 10^3 \text{ N/m}^2) \leq 20.00$.

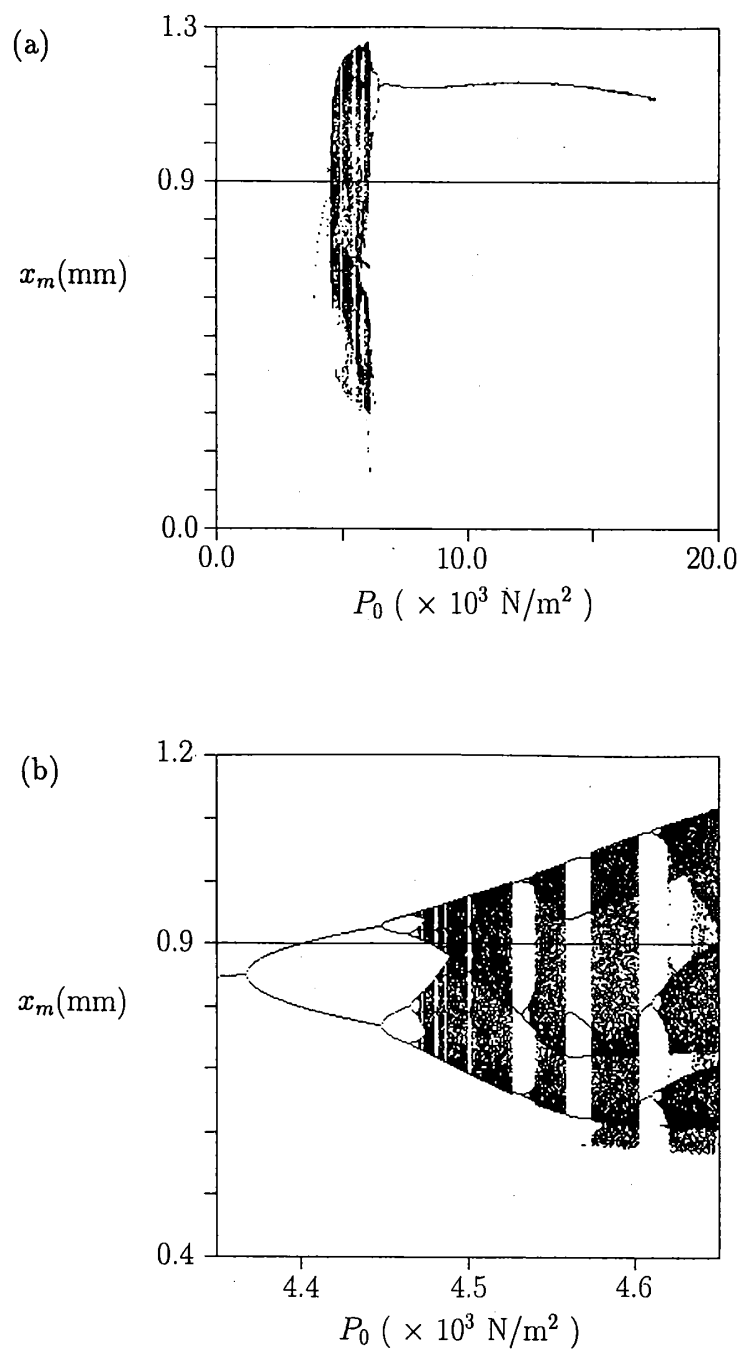


図 5 : 分岐図 $t_R = 0.5$ ms, $Z_0 = 7.50 \times 10^6$ kg/m⁴s,
 (a) $0.00 \leq P_0$ ($\times 10^3$ N/m²) ≤ 20.00 ,
 (b) $4.35 \leq P_0$ ($\times 10^3$ N/m²) ≤ 4.65 .

図 3 は $Z_0 = 2.31 \times 10^6 \text{ kg/m}^4\text{s}$, $P_0 = 8.00 \times 10^3 \text{ N/m}^2$ のときに得られた振動解である。(a) は $p(t)$ 波形、(b) は $U_f(t)$ 波形、(c) は $x(t)$ 波形、(d) は $p(t)$ のパワースペクトル、(e) は $U_f - p$ 状態空間における軌道である。波形は 20ms を示した。パワースペクトルは 32768 点の Hamming 窓を施した離散値から FFT の計算によって得られた。本報告で示されるパワースペクトルの分解能は全て $100\text{kHz}/32768 = 3.05\text{Hz}$ である。図 3 に示されたパワースペクトルの最大ピーク周波数 f は $f = 894.17\text{Hz}$ である。 $U_f - p$ 状態空間における軌道は p_n と U_{fn} の $N = 10001$ のサンプル値から得られた。得られた振動解は周期的であるので軌道は limit cycle になる。 $Z_0 = 2.31 \times 10^6 \text{ kg/m}^4\text{s}$ のとき、 P_0 を変化させて得られる振動解は全て図 3 に示した振動と同様な一周期の振動であり、その $x(t)$ 波形の最大値は図 2 から読みとれる。

$Z_0 = 5.00 \times 10^6 \text{ kg/m}^4\text{s}$ として前と同様に横軸に P_0 をとって描いた分岐図が図 4 であり不完全倍周期カスケードが得られる。 P_0 の一定範囲で二周期振動解が得られるがそれ以上の倍周期分岐は起きていない。

$Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{ kg/m}^4\text{s}$ にしたときの分岐図が図 5 であり、倍周期カスケードが得られる。振動は $3.90 \leq P_0 (\times 10^3 \text{ N/m}^2) \leq 17.50$ の範囲で励起される。 $4.5 \leq P_0 (\times 10^3 \text{ N/m}^2) \leq 6.2$ の範囲でプロットされる点が連続した線のように見えるところでは非周期振動解が得られている。 k 回目の倍周期分岐が起きるときの P_0 を $P_{0(k)}$ として、 $2^5 = 32$ ($k = 5$) 周期までの分岐点について $0.0001 \times 10^3 \text{ N/m}^2$ の精度で調べた。これらの値から

$$\frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 \frac{P_{0(k)} - P_{0(k-1)}}{P_{0(k+1)} + P_{0(k)}} = 4.661 \pm 0.041 \quad (12)$$

が得られた。これは Feigenbaum 定数 $\delta = 4.6692 \dots$ に極めて近い値である。

図 6 (a) ~ (e) に振動解の周期が倍加する様子を示す。(a) は周期倍分岐が起きる前の一周期の振動解である。パワースペクトルの最大ピーク周波数は $f = 692.75\text{Hz}$ 、 $U_f - p$ 状態空間における軌道は limit cycle である。(b) ~ (e) より周期が 2 倍、4 倍、8 倍、... となるのに対応してパワースペクトルには $1/2$ 、 $1/4$ 、 $1/8$ 、... の周波数にピークが現れ、 $U_f - p$ 状態空間における軌道は 2 重、4 重、8 重、... に巻いていくことがわかる。

図 7 は $Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{ kg/m}^4\text{s}$, $P_0 = 4.49 \times 10^3 \text{ N/m}^2$ のときに得られたカオス振動解である。パワースペクトルには非常の多くの振動成分が現れ $U_f - p$ 状態空間における軌道には自己相似構造が見られる。

図 8、図 9 は P_0 を一定にして Z_0 を変化させた場合の結果である。 Z_0 は $0.00 \leq Z_0 (\times 10^6 \text{ kg/m}^4\text{s}) \leq 20.00$ の範囲で $0.05 \times 10^6 \text{ kg/m}^4\text{s}$ ずつ変化させた。図 8 は $P_0 = 4.50 \times 10^3 \text{ N/m}^2$ で一定にした場合の結果である。非周期振動解は大体 $7.0 \leq Z_0 (\times 10^6 \text{ kg/m}^4\text{s}) \leq 14.0$ の範囲で得られている。また、倍周期カスケードも示されている。図 9 は $P_0 = 10.00 \times 10^3 \text{ N/m}^2$ の計算結果である。このように P_0 がある値よりも大きくなると Z_0 を広い範囲で変化させても非周期振動解、倍周期分岐は得られなかった。 $12.30 \leq Z_0 (\times 10^6 \text{ kg/m}^4\text{s}) \leq 20.00$ では二点がプロットされているが下側の点は波形の極大値が最大値以外にも得られることを示している。

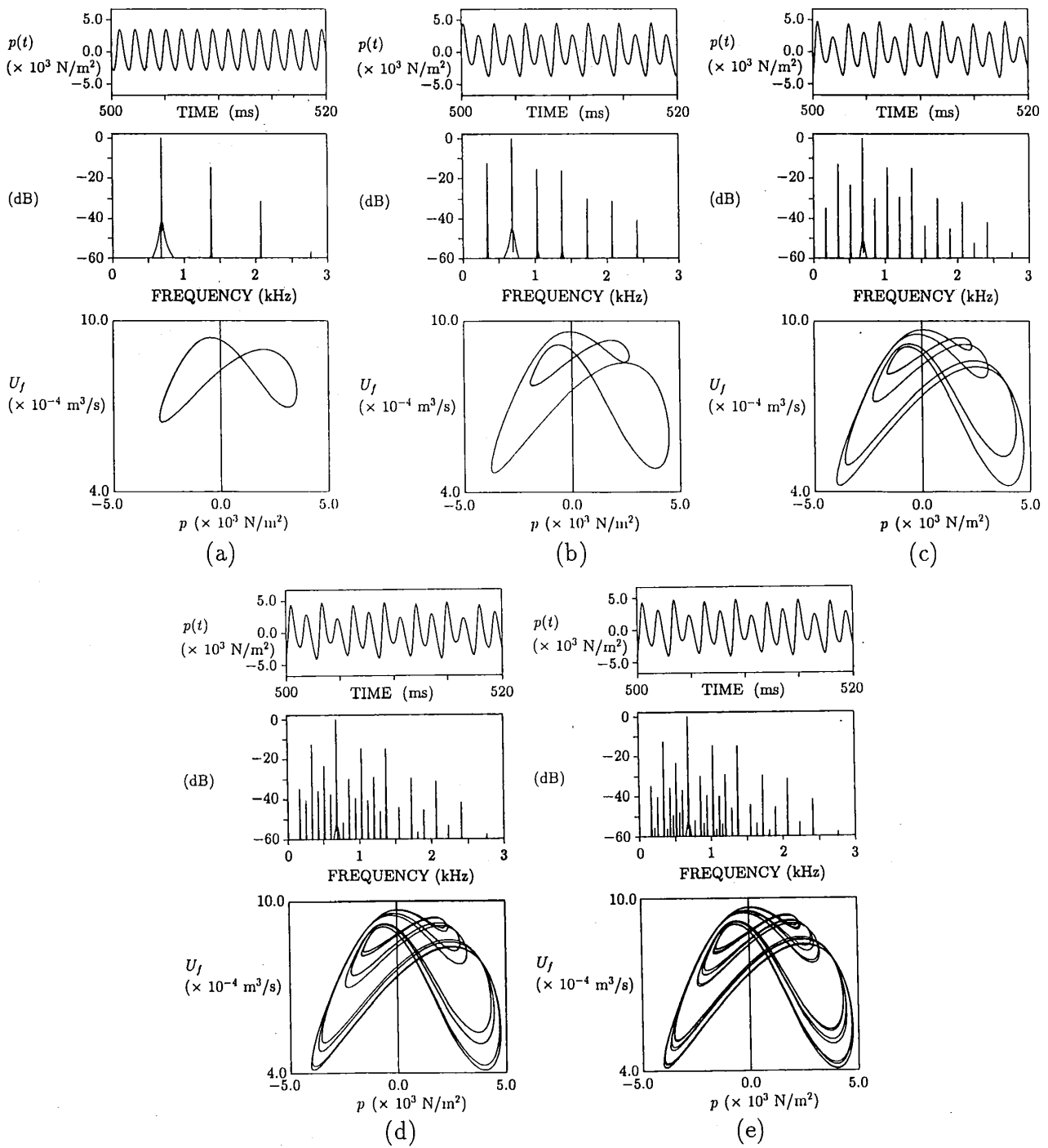


図 6 : [上段] $p(t)$ 波形, [中段] $p(t)$ のパワースペクトル,
[下段] $U_f - p$ 状態空間における軌道 $t_R = 0.5 \text{ ms}$, $Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{ kg/m}^4\text{s}$,
 P_0 ($\times 10^3 \text{ N/m}^2$): (a) 4.3660, (b) 4.4472, (c) 4.4649, (d) 4.4687, (e) 4.4695.

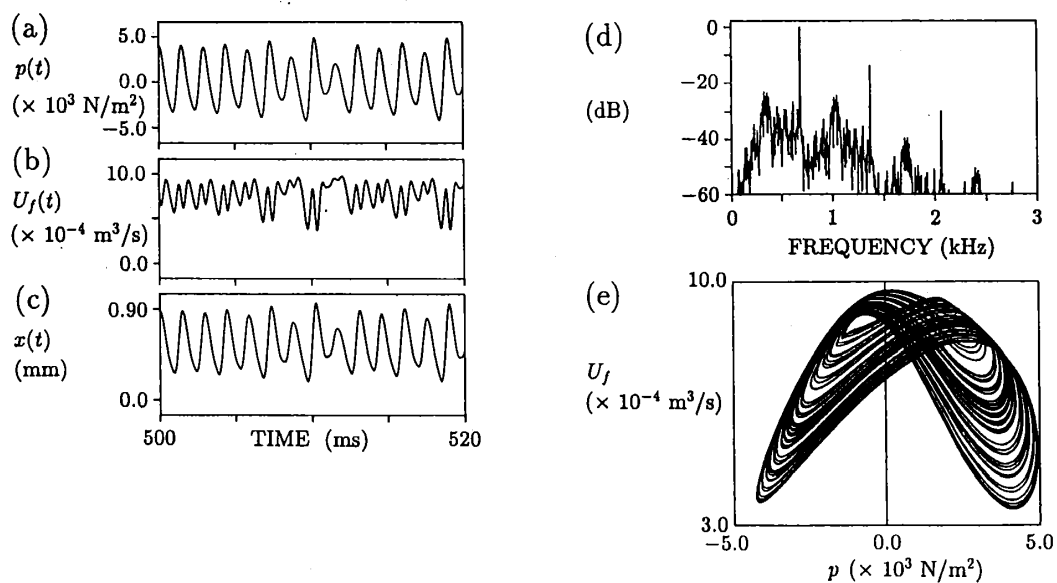


図 7 : (a) $p(t)$ 波形, (b) $U_f(t)$ 波形, (c) $x(t)$ 波形,
(d) $p(t)$ のパワースペクトル, (e) $U_f - p$ 状態空間における軌道
 $t_R = 0.5$ ms, $Z_0 = 7.50 \times 10^6$ kg/m⁴s, $P_0 = 4.49 \times 10^3$ N/m².

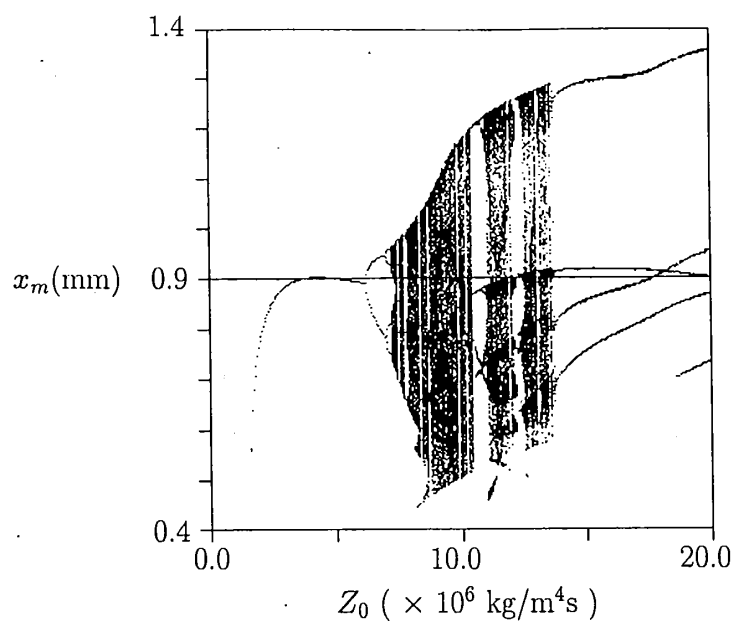


図 8 : 分岐図 $t_R = 0.5$ ms, $P_0 = 4.50 \times 10^3$ N/m², $0.00 \leq Z_0 (\times 10^6 \text{ kg/m}^4 \text{ s}) \leq 20.00$.

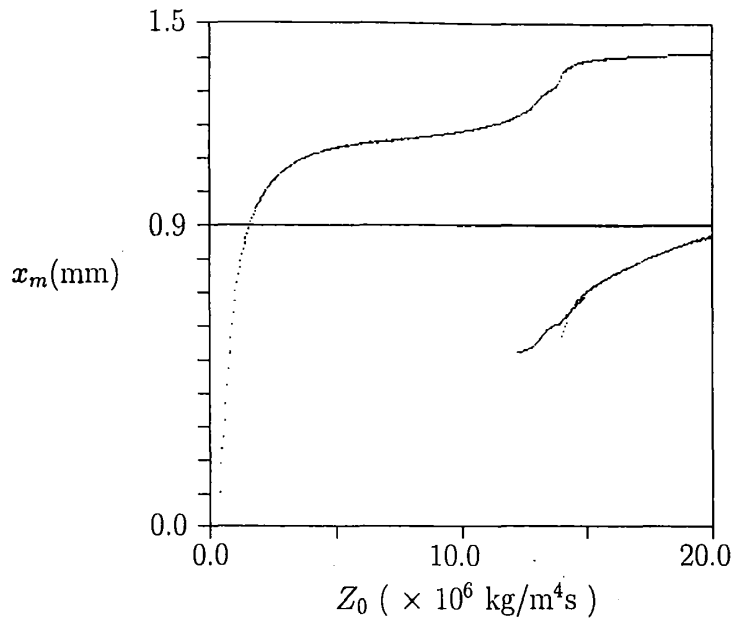


図 9：分岐図 $t_R = 0.5 \text{ ms}$, $P_0 = 10.00 \times 10^3 \text{ N/m}^2$, $0.00 \leq Z_0 (\times 10^6 \text{ kg/m}^4\text{s}) \leq 20.00$.

3. 考察

Schumacher 方程式の計算にあたって [3] の論文の付録では後退型オイラー法を用いた解法を示している。後退型オイラー法はこれから求めようとしている解が式の中に含まれているので陰解法であり 1 次の公式である。式 (2), (3) には非線形項が含まれるので陽解法よりも解の発散する可能性が少ない陰解法を用い方が計算誤差が少ないと考えられる。本報告では式 (1), (2), (4) の微分方程式を 2 次の陰解法である台形則を使用した差分方程式に置き換えて計算した。この方法によれば サンプルング周期 t_s を 0.01ms 以下とすると t_s による解の変化はほとんど認められなかった。後退型オイラー法を用いた方法ではさらに t_s を小さくしても解には誤差が存在した。本報告では $t_s = 0.01\text{ms}$ として計算を行った。計算で得られた Feigenbaum 定数 δ の値が理論値に極めて近いことから計算結果は正しいと思われる。

[3] で用いられた特性インピーダンス Z_0 は円柱気柱部分の断面積から求められた値である。 Z_0 は管の断面積を S_t として

$$Z_0 = \frac{\rho c}{S_t} \quad (13)$$

から決定される。ここで ρ は空気密度、 c は音速である。管体部分よりもマウスピース部分の断面積は小さくなっている。さらにマウスピース部分の内径は不連続でありリード先端に向かっ

て細くなっている。また、振動状態において最先端部ではリードが開閉している。従ってこの部分の影響はかなり大きく、今後の計算にはこれらを考慮に入れて $Z_0, r(t)$ を求める必要があると考えられる。

実際の楽器の形状から反射関数 $r(t)$ を計算するとマウスピース部分、ベル部分での反射を含み複雑な形になる。解の性質を把握しやすくし、しかも計算時間を節約するために簡単な $r(t)$ として Gauss 関数を用い、谷が1つの場合だけについて計算結果を示した。Gauss 関数は $t = t_R$ で対称な単純な形をしている。また、0 と見なしうる部分が長いので計算時間も十分に節約できた。

本報告では $t_R = 0.5\text{ms}$ としたとき Z_0 を三種類の値 ($Z_0 = 2.31, 5.00, 7.50 \times 10^6 \text{ kg/m}^4\text{s}$) で一定にして P_0 を変化させた場合、逆に P_0 を三種類の値 ($P_0 = 4.50, 7.00, 10.00 \times 10^3 \text{ N/m}^2$) で一定にして Z_0 を変化させた場合に得られた計算結果を示したが、周期的振動の他に多くの非周期振動解が得られた。非周期振動解の得られた範囲は、(1) $P_0 = 4.50 \times 10^3 \text{ N/m}^2$ については $Z_0 = 7.0 \sim 14.0 \times 10^6 \text{ kg/m}^4\text{s}$ (Schumacher が用いたよりも高い範囲)、(2) $Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{ kg/m}^4\text{s}$ については $P_0 = 4.5 \sim 6.2 \times 10^3 \text{ N/m}^2$ (振動が励起される P_0 の低い範囲) であった。これらの範囲はパラメータ空間 (Z_0, P_0) 内の非周期振動解が得られる領域を暗示する。 P_0 が低い範囲で非周期振動が励起される結果は過去に行った実験 [1], [2] と似ている。

分岐図を描くときに縦軸にとったのは $x(t)$ 波形データの極大値 x_m である。この値は $x(t)$ の時間に関する一回微分を $\dot{x}(t)$ として 2 次元位相空間 (x, \dot{x}) で考えると $\dot{x} > 0$ から $\dot{x} < 0$ の方向に $\dot{x} = 0$ を横切るときの x の値を示している。 $Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{ kg/m}^4\text{s}$ の場合に P_0 を横軸にとった分岐図、及び $P_0 = 4.50 \times 10^3 \text{ N/m}^2$ の場合に Z_0 を横軸にとった分岐図からカオスへの倍周期カスケードが得られた。Feigenbaum 定数 δ を計算したところ理論値に極めて近い値が得られた。ここでは吹鳴圧力を 0 から一定値 P_0 にステップ状に変化させたときの解を計算したが、実験では $p(t)$ の 2 ~ 4 % 程度の吹鳴圧力変化が見られた。また、この方程式に含まれる lip adjustment に関する物理量は唇の圧力下での静止時リード開口 x_0 だけである。我々が実験で測定したリードをくわえる深さ l については含まれていない。しかし、 $Z_0, r(t)$ がマウスピースおよびリードのくわえかたにより変化することも考えられる。したがって Schumacher 方程式にこれらの物理量を考慮する必要がある。

4. まとめ

Schumacher 方程式の振動解が、特性インピーダンス Z_0 、吹鳴圧力 P_0 の値によってどのように影響されるかについて検討した。反射関数 $r(t)$ は簡単な Gauss 関数を用い、その谷の最深部が現れるまでの時間を $t_R = 0.5\text{ms}$ にしたときの計算結果について詳細に示した。

Z_0 を三種類の値 ($Z_0 = 2.31, 5.00, 7.50 \times 10^6 \text{ kg/m}^4\text{s}$) で一定にして P_0 を変化させた場合、あるいは P_0 を三種類の値 ($P_0 = 4.50, 7.00, 10.00 \times 10^3 \text{ N/m}^2$) で一定にして Z_0 を変化させた場合の計算結果から周期的振動の他に多くの非周期振動解が得られた。非周期振動解

の得られた範囲は、(1) $P_0 = 4.50 \times 10^3 \text{ N/m}^2$ については $Z_0 = 7.0 \sim 14.0 \times 10^6 \text{ kg/m}^4\text{s}$ (Schumacher が用いたよりも高い範囲)、(2) $Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{ kg/m}^4\text{s}$ については $P_0 = 4.5 \sim 6.2 \times 10^3 \text{ N/m}^2$ (振動が励起される P_0 の低い範囲) であった。 P_0 が低い範囲で非周期振動が励起される結果は過去に行った実験 [1], [2] と似ている。

振動解として得られたマウスピース内圧力変化 $p(t)$ 波形、スリットを通過する音響流れ $U_f(t)$ 、リード開口 $x(t)$ 、 $p(t)$ のパワースペクトル、さらに $U_f - p$ 状態空間における軌道を示した。また、横軸に P_0 あるいは Z_0 をとり縦軸にリード開口 $x(t)$ 波形の極大値をとって分岐図を描かせた。その結果、カオスへの倍周期カスケードが得られた。Feigenbaum 定数 δ について計算したところ理論値に極めて近い値が得られた。

本報告の結果から $r(t)$ に Gauss 関数のような単純な $r(t)$ を用いた場合でさえ Z_0 , P_0 を変化させるだけで Schumacher 方程式からカオス振動のような非周期振動解、倍周期分岐などの現象が得られることを確認した。 Z_0 は非周期振動が励起される一つの原因になっていると考えられる。

謝辞

筑波大学永井啓之亮教授のお許しを得て著者の一人 (小嶋) は修士課程からの研究を続けさせて頂いている。同教授に厚く感謝する。

参考文献

- [1] T. Idogawa, T. Kobata, K. Komuro and M. Iwaki, "Nonlinear vibrations in the air column of a clarinet artificially blown," J. Acoust. Soc. Am. **93**, 540-551 (1993).
- [2] T. Kobata, T. Idogawa, "Pressure in the mouthpiece, reed opening, and air-flow speed at the reed opening of a clarinet artificially blown," J. Acoust. Soc. Jpn. (E) **14**, 417-428 (1993).
- [3] R. T. Schumacher, "Ab Initio Calculations of the Oscillations of a Clarinet," Acoustica **48**, 71-85, (1981).
- [4] M. E. McIntyre, R. T. Schumacher, and J. Woodhouse, "On the oscillations of musical instruments," J. Acoust. Soc. Am. **74**, 1325-1345 (1983).